1 Разложение функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ — интегрируемая и периодическая с периодом 2π. Коэффициентами Фурье функции $f(x)$ называют числа a_0, a_1, a_2, ... a_n, ... b_0, b_1, b_2, ... b_n, ..., которые находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ \mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \ \mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2, ...)$$

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется ряд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

1.1 Разложение по косинусам

Пусть $f(x)$ — чётная функция $(f(-x) = f(x), \forall x \in [-\pi; \pi])$. Чётная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

где коэффициенты находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

(где $n = 1, 2, 3, ...$)

1.2 Разложение по синусам

Пусть $f(x)$ — нечётная функция. $(f(-x) = -f(x), \forall x \in [-\pi;\pi])$. Нечётная функция разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

где b_n находится по формуле:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$$

(где $n = 1, 2, 3, ...$)

1.3 Сведения необходимые для решения примеров

Значение тригонометрических функций для πn при целых n.

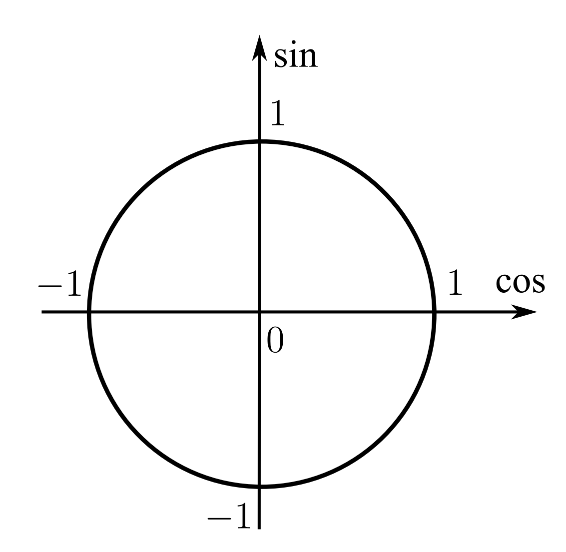


Рисунок 1 – Тригонометрический круг.

$\cos(\pi n) = (-1)^n$

$\cos(2\pi n) = 1$

$\sin(\pi n) = 0$

Формула интегрирования по частям:

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = \int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$$

1.4 Пример 1. Разложить функцию в ряд по синусам. (Лунгу 1.4.21.а)

Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд по синусам на интервале $(0; \pi)$.

Ряд имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Найдём b_n по формуле:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x$$

вычислим отдельно интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int x \sin nx \, \mathrm{d}x = \int \frac{x}{n} \mathrm{d}(-\cos nx) =$$

$$= \frac{1}{n} \int x \, \mathrm{d}(-\cos nx) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(x \cdot (-\cos nx) - \int (-\cos nx) \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(-x \cos nx + \frac{\sin nx}{n} \right) + C =$$

$$= \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} + C$$

теперь, основываясь на полученном результате, вычислим определённый интеграл:

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{\sin n\pi}{n^2} - \frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\sin n0}{n^2} + \frac{0 \cdot \cos n0}{n} =$$

$$= -\frac{\pi \cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$$

подставим в формулу для b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} =$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

Итого, раскладывая функцию в ряд, получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin nx}{n}$$

Ответ: $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sin nx}{n}$

1.5 Пример 2. Разложить функцию в ряд по синусам. (Лунгу 1.4.21.б)

Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ в ряд по синусам на интервале $(0; \pi)$.
Ряд имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Найдём b_n по формуле:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx \, \mathrm{d}x$$

вычислим отдельно интеграл:

$$\int \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int \sin nx \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x \sin nx \mathrm{d}x = (*)$$

интеграл $\int x \sin nx \mathrm{d}x$ мы уже вычислили в прошлом примере, применив формулу интегрирования по частям, запишем сразу результат:

$$(*) = -\frac{\pi}{4n}\cos nx - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\right) + C$$

Вычислим определённый интеграл:

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4n} \cos n\pi - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin n\pi}{n^2} - \frac{\pi \cos n\pi}{n}\right) +$$

$$+\frac{\pi}{4n} \cos n0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin n0}{n^2} - \frac{0 \cos n0}{n}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4n} \cdot (-1)^n + (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{4n} =$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{2\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}\right) + \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n} \cdot ((-1)^n + 1)$$

подставим в формулу для b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4n} \cdot ((-1)^n + 1) =$$

$$b_n = \frac{1}{2n} \cdot ((-1)^n + 1)$$

Итого, раскладывая функцию в ряд, получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cdot ((-1)^n + 1) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin nx}{2n} + \frac{\sin nx}{2n}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin nx}{2n} + \frac{\sin nx}{2n}$